COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

3.1 Autour de la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes

Rappel : sommes doubles

Les situations dans lesquelles des sommes doubles seront étudiées sont toutes issues de problèmes probabilistes. Dans ce cadre l'ordre de sommation n'a pas d'importance.

DÉFINITION 3.1 (Sommes doubles)

Soient I et J des ensembles inclus dans $\mathbb{N}$ (fini ou infini) et $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ des nombres réels positifs.
La somme double $\displaystyle\sum\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij}$ est définie par :

$$\sum\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{ij}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{ij}\right).$$

EXERCICE 3.1. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\displaystyle\sum\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$.
2. $\displaystyle\sum\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$.

DÉFINITION 3.2 (Loi d'un couple)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. La loi du couple (X,Y) est la donnée de :

- $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, le supports de X et Y.
- $\forall (i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$

$$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])$$

		$Y(\Omega)$			
		1	…	j	…
$X(\Omega)$	1		…		…
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
	i			$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])$	…
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$

REMARQUE 3.1.

- Lorsque cela sera possible, on présentera la loi de (X,Y) sous forme d'un tableau à double entrée.
- Pour déterminer la loi du couple (X,Y) il faut toujours commencer par rappeler $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ puis il faut donner la valeurs de $\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])$ où $i\in X(\Omega)$ et $j\in Y(\Omega)$.

EXERCICE 3.2. Exemple 1 (**de support fini**) Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules bleues. On extrait 3 boules de l'urne. On note X le nombre de boules blanches parmi ces 3 boules et Y le nombre de boules rouges.

Déterminer la loi du couple (X,Y). (On donne $\binom{9}{3}=84$)

EXERCICE 3.3. Exemple 2 (**de support infini**) Dans une succession de pile ou face pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p\in]0;1[$ et la probabilité d'obtenir face est $q=1-p$, on note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième pile. Déterminer la loi du couple (X,Y).

PROPRIÉTÉ 3.3

Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes alors :

- $\forall (i,j) \in X(\Omega)\times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \geqslant 0$
- la somme double $\displaystyle\sum\sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])$ converge et vaut 1.

3.1.1 Lois marginales

DÉFINITION 3.4 (Lois marginales)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes.

- La loi de X est appelée la **première loi marginale du couple** (X,Y).
- La loi de Y est appelée la **deuxième loi marginale du couple** (X,Y).

Lorsque l'on connait la loi du couple (X,Y) on peut en déduire la loi de X et la loi de Y grâce à **la formule des probabilités totales** :

PROPRIÉTÉ 3.5 (Lois marginales à l'aide de la loi du couple)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Alors on a :

$$\forall i \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}([X=i]) = \sum_{j\in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])$$

$$\forall j \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([Y=j]) = \sum_{i\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]).$$

Ce qu'il est important de retenir ici, c'est que lorsqu'on a la loi d'un couple pour obtenir la loi de X (ou celle de Y) il suffit de se servir de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y=j])_{j\in Y(\Omega)}$ (ou $([X=i])_{i\in X(\Omega)}$)

EXERCICE 3.4. Reprendre l'exemple 2 et déterminer la deuxième loi marginale du couple (X,Y) c'est-à -dire la loi de Y.

3.1.2 Lois conditionnelles

Très régulièrement, lors de l'étude d'un couple de variables aléatoires, (X,Y), nous aurons étudié au préalable et déterminé la loi de l'une des deux variables, disons X. Se posera donc la question de déterminer la loi de l'autre variable, ici Y.
Remarquons que d'après la formule des probabilités composées nous avons les relations suivantes :

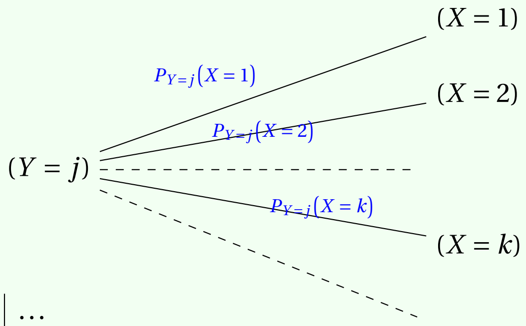
$$\forall (i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega), \quad P\big((X=i)\cap \mathbb{P}(Y=j)\big) = \mathbb{P}_{(X=i)}(Y=j)\times \mathbb{P}(X=i).$$

Ainsi on remarque que la donnée des probabilités $(\mathbb{P}(X=i))_{i\in X(\Omega)}$ (la loi de X) et des probabilités conditionnelles $\big(\mathbb{P}_{(X=i)}(Y=j)\big)_{i,j}$ suffisent à reconstituer la loi du couple (X,Y).

DÉFINITION 3.6 (Lois conditionnelles)

Soit $j \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y=j) \neq 0$.
La **loi de** X **conditionnelle à** $(Y=j)$
(ou sachant $(Y=j)$)
est la donnée pour tout $i \in X(\Omega)$, de :

$$P_{Y=j}(X=i)$$



1	2	....	i	...
$P_{Y=j}(X=1)$	$P_{Y=j}(X=2)$	....	$P_{Y=j}(X=i)$	...

PROPRIÉTÉ 3.7 (Loi marginale à l'aide d'une loi marginale et d'une loi conditionnelle)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Alors on a :

$$\forall i \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}([X=i]) = \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}_{(Y=j)}(X=i) \times \mathbb{P}(Y=j)$$

$$\forall j \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([Y=j]) = \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}_{(X=i)}(Y=j) \times \mathbb{P}(X=i).$$

EXERCICE 3.5. Reprendre l'exemple 2 et déterminer la loi de Y conditionnelle à $(X=k)$ puis en déduire la loi de Y.

Synthèse

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Pour tout $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a :
• Lois marginales à partir de la loi du couple :

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j])$$

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j])$$

• Loi du couple à partir de la loi conditionnelle :

$$\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \mathbb{P}(X=i) P_{[X=i]}(Y=j)$$
$$\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \mathbb{P}(Y=j) \mathbb{P}_{[Y=j]}(X=i)$$

• Lois marginales à partir des lois conditionnelles :

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j \in Y(\omega)} \mathbb{P}(Y=j) \mathbb{P}_{[Y=j]}(X=i)$$

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=i) \mathbb{P}_{[X=i]}(Y=j)$$

EXERCICE 3.6. Soit $p \in]0,1[$. On considère l'expérience suivante comportant 2 étapes :.
Etape 1 : On lance une pièce amenant "pile" avec probabilité p jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile".
Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.
Etape 2 : On procède ensuite à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule dans cette urne.
On note alors Y le numéro obtenu.

1. Déterminer la loi de X.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire la loi du couple (X, Y) puis, la loi Y.

4. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

3.2 Fonction de deux variables discrètes

3.2.1 Loi de probabilité de $Z = g(X, Y)$

Dans cette partie g désigne une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie au moins sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
L'ensemble des valeurs prises par $Z = g(X, Y)$ sont les $g(i, j)$ avec $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
Mais il se peut que certaines des valeurs des $g(i, j)$ soient égales.

PROPRIÉTÉ 3.8

Soit $Z = g(X, Y)$ et $k \in Z(\Omega)$. Alors on a :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{\substack{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(i,j)=k}} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$$

EXERCICE 3.7. Reprendre l'exemple 1 et déterminer les lois de $S = X + Y$ et $Z = XY$.

3.2.2 Théorème de transfert

Si on a calculé la loi de $Z = g(X, Y)$ alors on peut calculer l'espérance de façon classique mais si on n'a pas déterminé clairement la loi de Z alors on a le théorème suivant.

THÉORÈME 3.9 (Théorème de transfert)

Sous réserve de convergence absolue,

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum\sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(i, j)\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$$

En particulier, sous réserve de convergence absolue,

$$\mathbb{E}(XY) = \sum\sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} i\,j\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$$

$$\mathbb{E}(X + Y) = \sum\sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} (i + j)\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$$

REMARQUE **3.2.**
Il faut donc connaitre la loi du couple (X, Y) pour utiliser ce théorème. Bien qu'il soit possible de calculer une espérance de cette manière nous allons voir que dans la pratique nous avons des "raccourcis" bien utiles, nous permettant d'éviter les sommes doubles.

3.2.3 Linéarité de l'espérance

THÉORÈME 3.10 (admis)

Soient X et Y deux VAR discrètes et a, b deux réels. Alors

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

Soient $X_1, \cdots, X_n$ n VAR discrètes admettant toutes une espérance. Alors la variable $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

REMARQUE **3.3.**
Le théorème précédent est très utile dans la pratique car en général nous aurons déjà calculé les espérances de certaines variables aléatoires. Il suffira tout simplement d'appliquer cette propriété de linéarité pour calculer l'espérance d'une somme sans avoir à connaître de loi du couple et de calculer des sommes doubles. Par ailleurs la généralisations à n variables est très facile à démontrer grâce à cette propriété, elle aurait été bien plus difficile à établir à l'aide du théorème de transfert.

3.3 Indépendance de variables discrètes

3.3.1 Cas de deux variables

DÉFINITION 3.11

On dit que deux variables discrètes X et Y sont **indépendantes** si :

$$\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \;\; \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$$

REMARQUE **3.4.**
L'indépendance des variables X et Y traduit donc l'indépendance des événements $(X = i)$ et $(Y = j)$ pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

EXERCICE 3.8. Soient X et Y des variables aléatoires de loi conjointe donnée par :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}((X = n) \cap (Y = k)) = \frac{1}{2^{n+k}}.$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi une loi de couple de variables aléatoires discrètes.
2. Les variables X et X sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 3.9.

1. On reprend l'Exemple 1. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. On reprend l'Exemple 2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

PROPRIÉTÉ 3.12 (Produit de variables indépendantes)

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance alors

$$XY \text{ admet une espérance} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

la réciproque est fausse. Ce n'est pas parce que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ que les variables sont indépendantes.

EXERCICE 3.10. On suppose que les variables $X \hookrightarrow \mathscr{G}(1/2)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$ sont indépendantes.
On pose $U = X(2Y+1)$. Montrer que U admet une espérance et la calculer.

3.3.2 Maximum et minimum de deux variables indépendantes

Nous présentons dans l'exercices suivants quelques unes des techniques à connaître sur un exemple classique mais il faudra les re-démontrer à chaque fois.

EXERCICE 3.11. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \min(X, Y)$.

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X > n) = q^n$.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Z > n) = q^{2n}$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Z \geqslant n) = \mathbb{P}(Z > n) + \mathbb{P}(Z = n)$ (**égalité classique à savoir re-démontrer**).
3. (a) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Z = n) = q^{2(n-1)}(1-q^2)$.
   (b) Conclure que Z suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.

REMARQUE **3.5.**
Pour étudier la loi de $T = \max(X, Y)$ on va utiliser calculer $\mathbb{P}(Z < n)$ puis la relation $\mathbb{P}(Z \leqslant n) = \mathbb{P}(Z < n) + \mathbb{P}(Z = n)$ qui nous permettra de déterminer la loi de Z.

3.3.3 Somme de variables aléatoires indépendantes

PROPRIÉTÉ 3.13 (Loi d'une somme de variables)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{\substack{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ i+j=k}}\sum P((X=i)\cap(Y=j)).$$

REMARQUE **3.6.**
Notez que dans la somme de variables indépendantes, il suffit alors de remplacer chaque probabilités $\mathbb{P}((X = i)\cap(Y = j))$ par le produit $\mathbb{P}(X = i)\times\mathbb{P}(Y = j)$, ce qui simplifie grandement le calcul.

THÉORÈME 3.14 (Stabilités des lois binomiales)

Si X et Y sont deux variables **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n+m, p)$.

THÉORÈME 3.15 (Stabilités des lois de Poisson)

Si X et Y sont deux variables **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

3.3.4 Cas de plusieurs variables

Les résultats sur l'indépendance d'un couple de variables aléatoires discrètes se généralisent aisément à un nombre fini ou infini de variables aléatoires discrètes.

DÉFINITION 3.16 (Indépendance mutuelle)

• On dit que les variables $(X_1, ..., X_n)$ sont **(mutuellement) indépendantes** lorsque pour tout $(x_1, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

• On dit que la suite de variables aléatoires discrètes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est **une suite de variables aléatoires indépendantes** si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les variables aléatoires $(X_1, \cdots, X_n)$ sont indépendantes.

REMARQUE **3.7.**
L'indépendance mutuelle de n variables n'est pas l'indépendance "deux à deux" des variables.

PROPRIÉTÉ 3.17 (lemme des coalitions (admis))

Soient $(X_1, \cdots, X_n)$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes et soit $p \in [\![2, n-1]\!]$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $(X_1, \cdots, X_p)$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $(X_{p+1}, \cdots, X_n)$.

REMARQUE **3.8.**
Par exemple, si on montre que X et Y sont indépendantes alors X^2 et $2Y + 1$ sont indépendantes grâce au lemme des coalitions. De même si X, Y, Z sont des variables indépendantes, alors X est indépendante de $Y + Z$ d'après le lemme des coalitions.

Voici les résultats qui se généralisent à un nombre fini de variables aléatoires discrètes :

PROPRIÉTÉ 3.18

Soit $(X_1, ..., X_n)$ des variables indépendantes.
• **(espérance du produit)** si les X_i admettent une espérance alors leur produit $X_1 ... X_n$ aussi et

$$\mathbb{E}(X_1 \times ... \times X_n) = \mathbb{E}(X_1) \times ... \times \mathbb{E}(X_n).$$

• **(stabilité de la loi binomiale)** si les $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n_i, p)$ alors leur somme $X_1 + ... + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$.

• **(stabilité de la loi de Poisson)** si les $X_i \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_i)$ alors leur somme $X_1 + ... + X_n \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

EXERCICE 3.12 (Un grand classique)**.**

Montrer que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ si et seulement si $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $(X_1, ..., X_n)$ des variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

3.4 Covariance, variance et coefficient de corrélation linéaire

3.4.1 Covariance

DÉFINITION 3.19 (Covariance de deux variables)

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.
On appelle **covariance de** X **et de** Y le nombre réel :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big).$$

Rappel : on dit qu'une variable X admet un moment d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^*$ si la variable X^α admet une espérance ; ce qui se ramène à montrer, d'après le théorème de transfert, que la série $\sum_{k\in X(\Omega)} \mathbb{k}^{\alpha} P(X=k)$ converge absolument.

REMARQUE **3.9.**
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors XY admet une espérance $\left(xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$ et donc la covariance est bien définie.

PROPRIÉTÉ 3.20

Soient X, X', Y et Y' quatre variables aléatoires admettant des moment d'ordre 2 et a, b deux réels.

$$\mathrm{Cov}(aX + bX', Y) = a\mathrm{Cov}(X, Y) + b\mathrm{Cov}(X', Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X, aY + bY') = a\mathrm{Cov}(X, Y) + b\mathrm{Cov}(X, Y')$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$$

$$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$$

$$\mathrm{Cov}(X, a) = 0$$

Comme pour la variance, nous avons un moyen plus simple pour calculer une covariance, de sorte que nous ne reviendrons (quasiment) jamais à la définition.

THÉORÈME 3.21 (Formule de Huygens)

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 on a :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

REMARQUE **3.10.**
C'est ce théorème que l'on utilisera le plus souvent pour calculer la covariance.

EXERCICE 3.13. En reprenant l'exemple 1 calculer la covariance de X et Y

COROLLAIRE 3.22

Si X et Y sont **indépendantes** et admettent un moment d'ordre 2 alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

$\rightsquigarrow$ et donc par contraposée : Si $\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0$, alors X et Y ne sont pas indépendantes.

La réciproque est fausse : $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ n'entraine pas nécessairement que X et Y sont indépendantes.

REMARQUE **3.11.**
On peut quand même voir la covariance comme une quantité numérique qui mesure le défaut d'indépendance des variables. La notion adéquate est la notion suivante :

DÉFINITION 3.23 (Variables non corrélées)

Si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que les variables X et Y sont **non corrélées** .

REMARQUE **3.12.**
Deux variables aléatoires indépendantes sont non corrélées mais la réciproque est en générale fausse.

EXERCICE 3.14. Soit Y une variable suivant la loi uniforme discrète sur $[\![-1;1]\!]$. On note $Y = X^2$.

1. Montrer que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
2. Calculer $Cov(X, Y)$. Commentez.

3.4.2 Variance

THÉORÈME 3.24

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2. Alors :

- $X + Y$ admet une variance et de plus $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$
- si de plus X et Y sont **indépendantes**, alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

REMARQUE **3.13.**
On remarquera que la première égalité nous donne une autre méthode pour calculer la covariance de deux variables :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)}{2}$$

THÉORÈME 3.25 (Généralisation)

Si $X_1, \cdots, X_n$ admettent un moment d'ordre 2. Alors,

$X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance et : $\quad \mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + \sum\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

si de plus elles sont **indépendantes** : $\quad \mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i)$

EXERCICE 3.15. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi.
On suppose que X_1 admet un moment d'ordre 2 et on note $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$.
On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer en fonction de n, μ et σ l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$.

3.4.3 Coefficient de corrélation linéaire

DÉFINITION 3.26 (Coefficient de corrélation linéaire)

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 et de variance non nulle.
On appelle **coefficient de corrélation linéaire de** X **et** Y le réel :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Rappel : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$ est appelé l'écart-type de X.
Interprétation :
Ce nombre est un réel compris entre -1 et 1 qui compare les similarités entre les lois de X et de Y.
Cas $\rho(X,Y) = 1$: Dans ce cas l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable càd $Y = aX + b$ avec $a > 0$.
Cas $\rho(X,Y) = -1$: Dans ce cas l'une des variables est fonction affine décroissante de l'autre variable càd $Y = aX + b$ avec $a < 0$.
Cas $\rho(X,Y) \in]-1;1[$: Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables. Plus le coefficient est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les variables est forte ; on emploie parfois l'expression « **fortement corrélées** » pour qualifier les deux variables.
Cas $\rho(X,Y) = 0$: Une corrélation égale à 0 signifie que les variables sont linéairement indépendantes.

EXERCICE 3.16.
Soit $U \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $V \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ deux variables indépendantes.
On note $X = U + V$ et $Y = U - V$.

1. Déterminer $\rho(X,Y)$ en fonction de λ et μ.
2. Discuter suivant les valeurs de λ et μ du degré de corrélation des variables X et Y.